ESIAL 2A 2008-09

Graphes et Recherche Opérationnelle

Correction de l'examen partiel (Programmation linéaire)

Exercice 1. *Modélisation*

1. La variable x_3 est le maximum des écarts en valeur absolue entre les besoins estimés et réels pour chaque tâche :

$$x_3 = \max(|10 - 2x_1 - 5x_2|,\ |13 - 5x_1 - 8x_2|,\ |21 - 4x_1 - 2x_2|) \tag{1}$$

Le problème se modélise alors par :

$$\begin{aligned} &\min_{x_1,x_2,x_3} F(x) = x_3 \\ &\quad x_3 \geq |10 - 2x_1 - 5x_2| \\ &\quad x_3 \geq |13 - 5x_1 - 8x_2| \\ &\quad x_3 \geq |21 - 4x_1 - 2x_2| \\ &\quad x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

On obtient ainsi le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} &\min_{x_1,x_2,x_3} F(x) = x_3 \\ &\quad 2x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 10 \\ &\quad 2x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 10 \\ &\quad 5x_1 + 8x_2 - x_3 \leq 13 \\ &\quad 5x_1 + 8x_2 + x_3 \geq 13 \\ &\quad 4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 21 \\ &\quad 4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 21 \\ &\quad x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Forme standard :

$$\begin{aligned} &\min_x F(x) = c^\top x \\ &\quad Ax = b \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

avec $x = (x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_1, e_2, e_1)^\top$ et $c = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^\top$ où les $e_i \geq 0$ sont les variables d'écarts. La matrice A de taille 6×9 et le second membre $b \in \mathbb{R}^6$ sont donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & | & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 13 \\ 13 \\ 21 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. *Résolution par l'algorithme du simplexe*

Problème :

$$\max\,[\varphi = 3\,x_1 + 3\,x_2 + 1\,x_3]$$

$$s.c. \begin{cases} 2\,x_1 + 1\,x_2 + 1\,x_3 \geq 4 \\ 1\,x_1 + 0\,x_2 - 1\,x_3 \leq 2 \\ 1\,x_1 + 1\,x_2 + 2\,x_3 \leq 4 \end{cases}$$

Forme standard simpliciale :

$$\max\left[\varphi = 3\,x_1 + 3\,x_2 + 1\,x_3\right]$$

$$s.c.\ \begin{cases} 2\,x_1 + 1\,x_2 + 1\,x_3 - 1\,e_1 + 0\,e_2 + 0\,e_3 + 1\,a_1 = 4 \\ 1\,x_1 + 0\,x_2 - 1\,x_3 + 0\,e_1 + 1\,e_2 + 0\,e_3 + 0\,a_1 = 2 \\ 1\,x_1 + 1\,x_2 + 2\,x_3 + 0\,e_1 + 0\,e_2 + 1\,e_3 + 0\,a_1 = 4 \end{cases}$$

Phase 1 : résolution du problème auxiliaire

$$\min\left[\varphi_{aux} = 1\,a_1\right]$$

Base B			Hors base H				
a_1	e_2	e_3	x_1	x_2	x_3	e_1	$b_{/B}$
1	0	0	2	1	1	-1	4
0	1	0	1	0	-1	0	2
0	0	1	1	1	2	0	4
1	0	0	0	0	0	0	0
			-2	-1	-1	1	4

$\rightarrow$ variable entrante : x_1
$\rightarrow$ $\min\left(2, 2, 4 \mid x_1(s) > 0\right) \Rightarrow$ variable sortante : a_1
a_1 est supprimée
Plus de variable artificielle dans la base.

Phase 2 :

Base B			Hors base H			
x_1	e_2	e_3	x_2	x_3	e_1	$b_{/B}$
1	0	0	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	2
0	1	0	$-1/2$	$-3/2$	$1/2$	0
0	0	1	$1/2$	$3/2$	$1/2$	2
3	0	0	3	1	0	0
			$3/2$	$-1/2$	$3/2$	6

$\rightarrow$ variable entrante : x_2
$\rightarrow$ $\min\left(4, \times, 4 \mid x_2(s) > 0\right) \Rightarrow$ variable sortante : x_1

Base B			Hors base H			
x_2	e_2	e_3	x_1	x_3	e_1	$b_{/B}$
1	0	0	2	1	-1	4
0	1	0	1	-1	0	2
0	0	1	-1	1	1	0
$3/2$	0	0	0	$-1/2$	$3/2$	6
			-3	-2	3	12

$\rightarrow$ variable entrante : e_1
$\rightarrow$ $\min\left(\times, \times, 0 \mid e_1(s) > 0\right) \Rightarrow$ variable sortante : e_3

Base B			Hors base H			
x_2	e_2	e_1	x_1	x_3	e_3	$b_{/B}$
1	0	0	1	2	1	4
0	1	0	1	-1	0	2
0	0	1	-1	1	1	0
0	0	3	-3	-2	0	12
			0	-5	-3	12

L_H négatif : solution optimale atteinte mais non unique.
$\rightarrow$ variable entrante : x_1
$\rightarrow$ $\min(4, 2, \times \mid x_1(s) > 0) \Rightarrow$ variable sortante : e_2

Base B			Hors base H			
x_2	x_1	e_1	e_2	x_3	e_3	$b_{/B}$
1	0	0	-1	3	1	2
0	1	0	1	-1	0	2
0	0	1	1	0	1	2
0	0	0	0	-5	-3	12
			0	-5	-3	12

L_H négatif : solution optimale atteinte mais non unique.
$\rightarrow$ variable entrante : e_2
$\rightarrow$ $\min(\times, 2, 2 \mid e_2(s) > 0) \Rightarrow$ variable sortante : x_1
$\rightarrow$ solution déjà explorée.

$$\text{Ensemble des solutions optimales : } \mathcal{S} = \left\{ \lambda. \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda). \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in [0,1] \right\}.$$

Exercice 3. *Solutions réalisables*

1. Les deux solutions réalisables optimales x_1^* et x_2^* vérifient $F(x_1^*) = F(x_2^*) = \max_x F(x) = F_{\max}^*$ avec $Ax_1^* \leq b$, $x_1^* \geq 0$ et $Ax_2^* \leq b$, $x_2^* \geq 0$. Soit $\lambda \in [0,1]$ et on pose

$$z = \lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*.$$

Montrons que z est une solution réalisable optimale. On a clairement $z \geq 0$ car $\lambda \geq 0$ et $1 - \lambda \geq 0$. De plus, on a $Az = A(\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*) = \lambda A x_1^* + (1-\lambda)Ax_2^* \leq \lambda b + (1-\lambda)b = b$. Donc z est une solution réalisable. Par ailleurs $F(z) = F(\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*) = \lambda F(x_1^*) + (1-\lambda)F(x_2^*)$ car F est **linéaire**. On obtient donc $F(z) = \lambda F_{\max}^* + (1-\lambda)F_{\max}^* = F_{\max}^*$. La solution z est donc optimale. En conclusion, pour tout $\lambda \in [0,1]$, z est une solution réalisable optimale. Il y a donc une infinité de solutions réalisables optimales constituées par le segment joignant x_1^* à x_2^*.

2. Forme standard : on introduit les variables d'écarts $e \in \mathbb{R}^m$ et on obtient le problème équivalent suivant :

$$\begin{aligned} &\max_{(x,e)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} F(x) = c^\top x \\ &Ax + e = b \\ &x \geq 0,\ e \geq 0 \end{aligned}$$

Si $b \geq 0$, alors une solution réalisable évidente est donnée par $x = 0$ et $e = b \geq 0$.

3. (a) Les vecteurs $(x_1, x_2) = (0,0)$, $(x_1, x_2) = (1,1)$ et $(x_1, x_2) = (2,2)$ sont clairement des solutions réalisables qui ne dépendent pas de ε.

(b) Pour $0 \leq x_2 \leq 3$, on a $4x_1 - 6 \leq F(x) = 4x_1 - 2x_2 \leq 4x_1$. La valeur optimale de F est non bornée si et seulement si la variable x_1 est non-bornée.

– Si $\varepsilon > 0$, alors les contraintes sont équivalentes à

$$\begin{cases} 0 \leq x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq \dfrac{4 - (2-\varepsilon)x_2}{\varepsilon} \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, x_1 est bornée.

– Si $\varepsilon < 0$, alors les contraintes sont équivalentes à

$$\begin{cases} 0 \leq x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq \dfrac{4-(2-\varepsilon)x_2}{\varepsilon} \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, x_1 n'est pas bornée.

– Si $\varepsilon = 0$, alors les contraintes sont équivalentes à

$$\begin{cases} 0 \leq x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, x_1 n'est pas bornée.

Conclusion : F est bornée si et seulement si $\varepsilon > 0$.

Exercice 4. *Dualité*

1. Problème primal sous forme canonique pure :

$$\begin{aligned} &\max\,[F = 3/2x_1 + 3x_2 + x_3] \\ &\quad x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1 \\ &\quad x_1 - x_3 \leq 5 \\ &\quad -x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

soit encore : $\begin{aligned} &\max_x F(x) = c^\top x \\ &\quad Ax \leq b \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned}$ avec $c = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

<u>Problème dual</u> :

$$\begin{aligned} &\min_y G(y) = b^\top y \\ &\quad A^\top y \geq c \\ &\quad y \geq 0 \end{aligned}$$

ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} &\min_y G(y) = y_1 + 5y_2 - y_3 \\ &\quad y_1 + y_2 - y_3 \geq 3/2 \\ &\quad 2y_1 - 2y_3 \geq 3 \\ &\quad y_1 - y_2 - 2y_3 \geq 1 \\ &\quad y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Solution optimale du dual : y_1^*, y_2^*, y_3^*. Les C.O.P.D donnent :

$$\begin{aligned} &x_1^* = 1 \Rightarrow y_1^* + y_2^* - y_3^* = 3/2 \\ &e_2^* = 4 \Rightarrow y_2^* = 0. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} &y_1^* = \alpha \geq 3/2 \text{ car } y_1^* = y_3^* + 3/2 \geq 3/2\ (y_3^* \geq 0) \\ &y_2^* = 0 \\ &y_3^* = \beta \end{aligned}$$

avec $\alpha - \beta = 3/2$. De plus, la troisième contrainte du dual donne $y_1^* - y_2^* - 2y_3^* \geq 1$ soit encore $\alpha - 2\beta \geq 1$. Avec $\beta = \alpha - 3/2$, on obtient $\alpha - 2(\alpha - 3/2) \geq 1$ soit encore $\alpha \leq 2$. En conclusion, L'ensemble des solutions du problème dual est donné par $\mathcal{S}^* = \{(\alpha, 0, \beta)^\top \mid \alpha - \beta = 3/2 \text{ avec } 2 \leq \alpha \leq 3/2\}$.

Exercice 5. *Analyse de Sensibilité*

1. Condition d'optimalité : $L_{H^*}^\top = c_{H^*}^\top - c_{B^*}^\top A_{H^*}^* \leq 0$ avec $c_{H^*}^\top = (c_1, 0, 0)$, $c_{B^*}^\top = (10, 20)$ et

$$A_{H^*}^* = \begin{pmatrix} 7/2 & 1/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

On trouve $L_{H^*} = \begin{pmatrix} c_1 - 65 \\ -15 \\ -25 \end{pmatrix} \leq 0$, ce qui implique $c_1 \leq 65$. Si $c_1 > 65$, le plan de production va changer et la variable x_1 va devenir non nulle a priori.

2. Au départ du simplexe (étape 0), les colonnes de la matrice A correspondant à la base e_1 et e_2 forment l'identité c'est-à-dire $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et par conséquent à l'optimum on détermine la matrice inverse $A_{B^*}^{-1}$ en lisant les colonnes correspondants à e_1^* et e_2^* dans la matrice A^* du dernier tableau du simplexe :

$$A_{B^*}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \quad\uparrow \\ e_1^* & \quad e_2^* \end{array} \end{array}.$$

3. Condition de faisabilité : $x_{B^*} = A_{B^*}^{-1} d \geq 0$ avec $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ 10 \end{pmatrix}$. On obtient

$$x_{B^*} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} d_1 + 5 \\ \frac{1}{2} d_1 + 5 \end{pmatrix} \geq 0 \tag{2}$$

Les conditions s'écrivent

$$\begin{cases} d_1 \geq -\dfrac{10}{3} \\ d_1 \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow d_1 \geq -\frac{10}{3}$$

En conclusion, si $d_1 \geq -10/3$ alors la solution de base x_{B^*} donnée par (2) est réalisable et optimale.