ESIAL 2A 2008-09

Graphes et Recherche Opérationnelle

MÉTHODE DU SIMPLEXE

$$\text{(PL)} \; : \quad \max_{x\in\mathbb{R}^n} \left[F(x) = c^\top x\right] \qquad Ax = b \qquad x \geq 0$$

avec la matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ (n variables, m contraintes). On dispose d'une base B avec la décomposition

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_H \end{pmatrix}, \; x_B \in \mathbb{R}^m, \; x_H \in \mathbb{R}^{n-m}$$
$$A = (I_m \mid A_H) \quad \text{(forme simpliciale)}$$

1 Simplexe en phase 2 (sans variable artificielle)

- **Coûts réduits**
  Soit $\underline{x}$ une solution de base réalisable associée à la base B (i.e. $\underline{x}_B = b$ et $\underline{x}_H = 0$).

$$F(x) = F(\underline{x}) + L_H^\top x_H$$

$$\boxed{L_H^\top = c_H^\top - c_B^\top A_H}$$

- **Variable entrante** $x_e \in x_H$.
  $x_e \leftarrow\text{--}\; \max_j \left[(L_H)_j, \text{ avec } (L_H)_j > 0\right]$
  Remarque : si on cherche $\min_x F(x)$, alors $x_e \leftarrow\text{--}\; \min_j \left[(L_H)_j, \text{ avec } (L_H)_j < 0\right]$

- **Variable sortante** $x_s \in x_B$.
  $x_s \leftarrow\text{--}\; x_e = \min_j \left[\dfrac{b_j}{a_{j,e}}, \text{ avec } a_{j,e} = (A_H)_{j,e} > 0\right]$

- **Retour à un système simplicial**
  CHANGEMENT DE BASE : $\widetilde{B} = B + \{e\} - \{s\}$
  $\widetilde{H} = H - \{e\} + \{s\}$
  RÉÉCRITURE DANS LA NOUVELLE BASE : $A = [I_m \mid A_H] \;\Rightarrow\; \left[A_{\widetilde{B}} \mid A_{\widetilde{H}}\right] = A'$.

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; (I_m \mid \widetilde{A}_{\widetilde{H}})x = A_{\widetilde{B}}^{-1}b = \widetilde{b} \;\text{ avec }\; \boxed{\widetilde{A}_{\widetilde{H}} = A_{\widetilde{B}}^{-1}A_{\widetilde{H}}}$$

$$A_{\widetilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & & a_{1,e} & & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & & & \\ & & & a_{s,e} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & & a_{m,e} & & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{\widetilde{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & -a_{1,e}/a_{s,e} & & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1/a_{s,e} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & & -a_{m,e}/a_{s,e} & & 1 \end{pmatrix}$$

MISE À JOUR DES COÛTS RÉDUITS :

$$\boxed{\widetilde{F}_{opt} = F_{opt} + (L_H)_e\,\widetilde{b}_s}$$

$$\boxed{\widetilde{L}_{\widetilde{H}}^\top = L_{\widetilde{H}}^\top - (L_H)_e\left[\widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right]_s}$$

où $\left[\widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right]_s$ désigne la ligne s de la matrice $\widetilde{A}_{\widetilde{H}}$.

- **Tableau du simplexe à l'étape k**

	x_B	x_H		
$B_k = A_{\widetilde{B}}^{-1}$ $\downarrow$ étape $k+1$	I_m	A_H	b	
	$\overline{L}_B$	$\overline{L}_H$	$\overline{F}$	$\longleftarrow$ étape $k-1$
		L_H	F	

2 Cas d'arrêt du simplexe en phase 2

A chaque étape du simplexe sur (PL) :

- Si $L_H < 0$ alors optimum unique atteint $\rightarrow$ arrêt.
- Si $L_H \leq 0$ alors
  - Si $(L_H)_e = 0$ et $x_e > 0$ alors optimum non-unique $\rightarrow$ arrêt.
  - Si $(L_H)_e = 0$ et $x_e = 0$ alors optimum unique (base dégénérée) $\rightarrow$ arrêt.
- Si $(L_H)_e > 0$ et x_e est non-bornée alors pas d'optimum fini $\rightarrow$ arrêt.

3 Variables artificielles (simplexe en phase 1)

Variables artificielles $a = (a_1, \cdots, a_m)$.
Problème auxiliaire :

$$(\text{PLA}) \;:\; \min \left[F_{\text{aux}} = \sum_{i=1}^{m} a_i \right] \quad \begin{array}{l} Ax + a = b \\ x \geq 0, \quad a \geq 0 \end{array}$$

Cas d'arrêt du simplexe en phase 1 :

A chaque étape du simplexe sur (PLA) :

- Si $F_{\text{aux}} = 0$ et $\nexists a_j \in x_B$ alors solution réalisable obtenue pour (PL) (fin normale) $\rightarrow$ passage à la phase 2.
- Si $F_{\text{aux}} = 0$ et $\exists a_j \in x_B$ avec $a_j = 0$ alors équations redondantes $\rightarrow$ suppression des lignes et colonnes associées à a_j et passage à la phase 2.
- Si $F_{\text{aux}} > 0$ alors pas de solution réalisable pour (PL) $\rightarrow$ arrêt.

4 Analyse post-optimale

B^* base optimale
Conditions d'optimalité : $L_{H^*}^{\top} = c_{H^*}^{\top} - L_{B^*}^{\top} A_{H^*}^* \leq 0$ où A^* est la matrice du dernier tableau du simplexe.
Conditions de faisabilité : $x_{B^*} = A_{B^*}^{-1} b \geq 0$.

5 Dualité et COPD

$\boxed{\text{Primal}}$

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \left[F(x) = c^{\top} x \right] \quad \begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}$$

$\boxed{\text{Dual}}$

$$\min_{y \in \mathbb{R}^m} \left[G(y) = b^{\top} y \right] \quad \begin{array}{l} y \geq 0 \\ A^{\top} y \geq c \end{array}$$

$\boxed{\text{COPD}}$ (x^* et y^* sol. optimales)

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i \Rightarrow y_i^* = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j \Rightarrow x_j^* = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_i^* > 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \\ x_j^* > 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \end{array} \right.$$